

9.2. Lomené výrazy

- Lomený výraz je podíl dvou výrazů.
- Podíl píšeme ve tvaru zlomku.
- Jmenovatel musí být různý od nuly - musíme určit podmínky, pro které mají dané výrazy smysl.
- S lomenými výrazy počítáme stejně jako se zlomky.

Určování podmínek řešitelnosti

- Jmenovatele upravíme na součin a ze součinu určíme podmínky, pro které mají dané výrazy smysl.

Příklad:

Určete, kdy mají dané výrazy smysl:

$$a) \frac{4x-5}{x-1} \quad \dots \quad x-1 \neq 0 \quad x \neq 1$$

$$b) \frac{3x-7}{x^2+2x} = \frac{3x-7}{x(x+2)} \quad \dots \quad x(x+2) \neq 0 \quad x \neq 2 \quad x \neq -2$$

Rozšiřování lomených výrazů

- Čitatele i jmenovatele násobíme stejným výrazem různým od nuly.

Příklad:

Rozšiřte daný výraz výrazem uvedeným v závorce:

$$\frac{2x-1}{x-3} (x+3) \quad \dots \quad \frac{(2x-1)(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x^2+6x-x-3}{x^2-9} = \frac{2x^2+5x-3}{x^2-9}$$

$x \neq 3 \quad x \neq -3$

Krácení lomených výrazů

- Čitatele a jmenovatele dělíme největším společným dělitelem.
- Krátit můžeme POUZE v případě, že je číselník i jmenovatel ve tvaru SOUČINU.

Příklad:

Zkraťte lomený výraz:

$$a) \frac{10x}{2x} = \frac{10x : 2x}{2x : 2x} = \frac{5}{1} = 5 \quad x \neq 0$$

$$b) \frac{m-n}{3m-3n} = \frac{(m-n)}{3(m-n)} = \frac{1}{3} \quad m \neq n \quad \frac{x-y}{3x-3y} = \frac{(x-y)}{3(x-y)} = \frac{1}{3} \quad x \neq y$$

$$c) \frac{x^2-4}{2x-4} = \frac{(x-2)(x+2)}{2(x-2)} = \frac{x+2}{2} \quad x \neq 2$$

Sčítání lomených výrazů

- Lomené výrazy převedeme na společného jmenovatele.
- Sečteme jako zlomky.
- Jmenovatele necháme ve tvaru součinu.
- Upravujeme pouze čitatele do tvaru součinu.
- Případně vykrátíme výsledný výraz.
- Zapišeme podmínky, pro které mají dané výrazy smysl.

Příklad:

Sečtěte dané výrazy:

$$\frac{5}{a} + \frac{3a+3}{a} = \frac{5+3a+3}{a} = \frac{8+3a}{a}$$

a) Zapišeme podmínky, pro které mají dané výrazy smysl: $a \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{2x+3}{x+2} + \frac{1}{x} &= \frac{x(2x+3) + (x+2) \cdot 1}{x(x+2)} = \frac{2x^2+3x+x+2}{x(x+2)} = \\ &= \frac{2x^2+4x+2}{x(x+2)} = \frac{2(x^2+2x+1)}{x(x+2)} = \frac{2(x+1)^2}{x(x+2)} \end{aligned}$$

b) Zapišeme podmínky, pro které mají dané výrazy smysl: $x \neq 0$ a $x \neq -2$

$$\begin{aligned} \frac{k}{k-3} + \frac{k}{k^2-9} &= \frac{k}{k-3} + \frac{k}{(k-3)(k+3)} = \\ &= \frac{k(k+3)+k}{(k+3)(k-3)} = \frac{k^2+3k+k}{(k+3)(k-3)} = \frac{k^2+4k}{k^2-9} \end{aligned}$$

c) Zapišeme podmínky, pro které mají dané výrazy smysl: $k \neq 3$ a $k \neq -3$

Odčítání lomených výrazů

- Lomené výrazy převedeme na společného jmenovatele.
- Odečteme jako zlomky.
- Jmenovatele necháme ve tvaru součinu.
- Upravujeme pouze čitatele - čitatele odčítáme podle pravidel o odčítání výrazů!
- Případně vykrátíme výsledný výraz.
- Zapišeme podmínky, pro které mají dané výrazy smysl.

Příklad:

Odečtěte dané výrazy:

$$\begin{aligned} \frac{6a-4}{a+1} - \frac{6a-10}{2a+2} &= \frac{6a-4}{a+1} - \frac{6a-10}{2(a+1)} = \frac{2(6a-4) - (6a-10)}{2(a+1)} = \\ &= \frac{12a-8-6a+10}{2(a+1)} = \frac{6a+2}{2(a+1)} = \frac{2(3a+1)}{2(a+1)} = \frac{3a+1}{a+1} \end{aligned}$$

Zapišeme podmínky, pro které mají dané výrazy smysl: $a \neq -1$

Násobení lomených výrazů

- Součin číselných lomíme součinem jmenovatelů.
- Jde-li krátit, krátíme ihned.
- Zapišeme podmínky, pro které mají dané výrazy smysl.

Příklad:

Vynásobte dané výrazy:

$$a) \frac{3}{xy} \cdot \frac{x}{3} = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{y}$$

Zapišeme podmínky, pro které mají dané výrazy smysl: $x \neq 0$ a $y \neq 0$

$$b) \frac{2-a}{2a^2-8} \cdot \frac{2a+4}{3} = \frac{2-a}{2(a^2-4)} \cdot \frac{2(a+2)}{3} = \frac{2-a}{(a+2)(a-2)} \cdot \frac{(a+2)}{3} =$$

$$\frac{2-a}{a-2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{-(a-2)}{3(a-2)} = -\frac{1}{3}$$

Zapišeme podmínky, pro které mají dané výrazy smysl: $a \neq 2$ a $a \neq -2$

Dělení lomených výrazů

- Lomeným výrazem dělíme tak, že násobíme výrazem převráceným.
- Podmínky řešitelnosti určíme ze VŠECH jmenovatelů.
- Zapišeme podmínky, pro které mají dané výrazy smysl.

Příklad:

Vydělte dané výrazy:

$$a) \frac{x^2}{5} : \frac{x}{10} = \frac{x^2}{5} \cdot \frac{10}{x} = \frac{x}{1} \cdot \frac{2}{1} = 2x$$

Zapišeme podmínky, pro které mají dané výrazy smysl: $x \neq 0$

$$b) \frac{3x+6}{x-1} : \frac{2x+4}{x^2-1} = \frac{3(x+2)}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{2x+4} = \frac{3(x+2)}{x-1} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{2(x+2)} =$$

$$\frac{3}{1} \cdot \frac{x+1}{2} = \frac{3x+3}{2}$$

Zapišeme podmínky, pro které mají dané výrazy smysl: $x \neq 1$ a $x \neq -1$ a $x \neq -2$

Složené lomené výrazy

- Složené lomené výrazy upravujeme stejně jako složené zlomky - výraz v čitateli dělíme výrazem ve jmenovateli.
- Zapišeme podmínky, pro které mají dané výrazy smysl ze VŠECH jmenovatelů.

Příklad:

Zjednodušte dané výrazy:

a)

$$\frac{\frac{3x}{8}}{\frac{6x}{4}} = \frac{3x}{8} \cdot \frac{4}{6x} = \frac{3x}{8} \cdot \frac{4}{6x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Zapišeme podmínky, pro které mají dané výrazy smysl: $x \neq 0$

b)

$$\frac{\frac{t-4}{3t-3}}{\frac{8-2t}{t-1}} = \frac{t-4}{3t-3} \cdot \frac{t-1}{8-2t} = \frac{t-4}{3t-3} \cdot \frac{t-1}{2(4-t)} = \frac{-(4-t)}{3(t-1)} \cdot \frac{t-1}{2(4-t)} = \frac{t-1}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

Zapišeme podmínky, pro které mají dané výrazy smysl: $t \neq 1$ a $t \neq 4$

9.3. Rovnice s neznámou ve jmenovateli

- **OPAKOVÁNÍ:** Rovnice je rovnost výrazů, z nichž alespoň jeden obsahuje proměnnou, která se v rovnici stává hledanou **neznámou**. Řešit rovnici znamená najít takové číslo (tzv. **kořen rovnice**), po jehož dosazení se z rovnice stane rovnost číselných výrazů.
- Rovnice řešíme nejčastěji pomocí ekvivalentních úprav:
- **KOŘENY ROVNICE SE NEZMĚNÍ:**

- a) přičteme-li (odečteme-li) totéž číslo nebo tentýž výraz k oběma stranám rovnice,
- b) vynásobíme-li (vydělíme-li) obě strany rovnice tímž číslem nebo výrazem různým od nuly,
- c) zaměníme-li navzájem pravou a levou stranu rovnice

9.3.01. Řešení rovnic se zlomky

- Obsahuje-li rovnice, kterou řešíme, zlomky, vynásobíme celou rovnici jejich společným jmenovatelem.
- **POZOR!** je třeba brát zřetel na to, v jakém číselném oboru máme rovnici řešit!

Příklady:

a) Řešte v R rovnici:

$$\begin{aligned} \frac{1+x}{5} &= \frac{x+10}{2} & / \cdot 10 \\ 2+2x &= 5x+50 & / -50; -2x \\ -48 &= 3x & / \div 3 \\ -16 &= x \\ \underline{\underline{x}} &= \underline{\underline{-16}} \end{aligned}$$

$$L = \frac{1-16}{5} = \frac{-15}{5} = -3$$

Zkouška: $P = \frac{-16+10}{2} = \frac{-6}{2} = -3$

$$L = P$$

b) Řešte v R rovnici:

$$\frac{3}{8} \cdot \left(\frac{4}{9} + \frac{16x}{9} \right) = \left(\frac{3x}{4} - \frac{2}{6} \right) \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{18}$$

$$\frac{1}{6} + \frac{2x}{3} = \frac{x}{4} - \frac{1}{9} + \frac{5}{18} \quad / \cdot 36$$

$$6 + 24x = 9x - 4 + 10$$

$$6 + 24x = 9x + 6 \quad / - 6$$

$$24x = 9x \quad / - 9x$$

$$15x = 0 \quad / \div 15$$

$$\underline{\underline{x = 0}}$$

$$L = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{4}{9} + \frac{16 \cdot 0}{9} \right) = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{6}$$

Zkouška: $P = \left(\frac{3 \cdot 0}{4} - \frac{2}{6} \right) \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{18} = -\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{18} = -\frac{2}{18} + \frac{5}{18} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

$$L = P$$

• **POZOR!** minus před zlomkem je jako minus před závorkou!

c) Řešte v R rovnici:

$$\frac{3x-1}{4} - \frac{4x-1}{6} = \frac{1}{2} \quad / \cdot 12$$

$$3(3x-1) - 2(4x-1) = 6$$

$$9x - 3 - 8x + 2 = 6$$

$$x - 1 = 6 \quad / + 1$$

$$\underline{\underline{x = 7}}$$

$$L = \frac{3 \cdot 7 - 1}{4} - \frac{4 \cdot 7 - 1}{6} = \frac{21 - 1}{4} - \frac{28 - 1}{6} = \frac{20}{4} - \frac{27}{6} = \frac{60 - 54}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Zkouška: $P = \frac{1}{2}$

$$L = P$$

9.3.02. Rovnice s neznámou ve jmenovateli

- Neznámá se vyskytuje ve jmenovateli.
- **POZOR!** je třeba stanovit podmínky, výrazy ve jmenovateli se nesmějí rovnat nule!
- Je-li to možné, snažíme se nejprve zbavit zlomků tak, že celou rovnici vynásobíme společným jmenovatelem všech zlomků.
- **POZOR!** je třeba vždy provést zkoušku!

Příklady:

a) Řešte v R rovnici:

$$\frac{3}{x} - 5 = 2 \quad / \cdot x \quad \boxed{x \neq 0}$$

$$3 - 5x = 2x \quad / + 5x$$

$$3 = 7x \quad / \div 7$$

$$\frac{3}{7} = x$$

$$x = \frac{3}{7}$$

$$L = \frac{3}{\frac{3}{7}} - 5 = \frac{3 \cdot 7}{3} - 5 = 7 - 5 = 2$$

Zkouška: $P = 2$

$$L = P$$

b) Řešte v R rovnici:

$$\frac{5}{x-4} = 5 \quad / \cdot (x-4) \quad \boxed{x \neq 4}$$

$$5 = 5(x-4)$$

$$5 = 5x - 20 \quad / + 20$$

$$25 = 5x \quad / \div 5$$

$$5 = x$$

$$x = 5$$

$$L = \frac{5}{5-4} = \frac{5}{1} = 5$$

Zkouška: $P = 5$

$$L = P$$

c) Řešte v R rovnici:

$$\frac{2+y}{2-y} = 0 \quad / \cdot (2-y) \quad \boxed{y \neq 2}$$

$$2+y = 0 \quad / -2$$

$$y = -2$$

$$L = \frac{2+(-2)}{2-(-2)} = \frac{0}{4} = 0$$

Zkouška: $P = 0$

$$L = P$$

d) Řešte v R rovnici:

$$\frac{2x-2}{2x} = 1 - \frac{1}{x} \quad / \cdot 2x \quad \boxed{x \neq 0}$$

$$2x-2 = 2x-2 \quad / +2$$

$$2x = 2x \quad / -2x$$

$$0 \cdot x = 0$$

řešením jsou všechna reálná čísla mimo číslo 0, zkoušku tedy můžeme provést dosazením libovolného čísla za neznámou. Obvykle volíme takové hodnotu, aby zkouška byla co nejjednodušší.

$$L = \frac{2 \cdot 1 - 2}{2 \cdot 1} = \frac{2 - 2}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Zkouška: pro $x = 1$: $P = 1 - \frac{1}{1} = 1 - 1 = 0$

$$L = P$$

e) Řešte v R rovnici:

$$\frac{z+4}{z-2} = \frac{5z+2}{2z-4} \quad \boxed{z \neq 2}$$

$$\frac{z+4}{z-2} = \frac{5z+2}{2(z-2)} \quad / \cdot 2(z-2)$$

$$2(z+4) = 5z+2$$

$$2z+8 = 5z+2 \quad / -2$$

$$2z+6 = 5z \quad / -2z$$

$$6 = 3z \quad / \div 3$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & = & z \\ z & = & 2 \end{array}$$

Rovnice nemá řešení – kořen rovnice je vyloučen podmínkou!

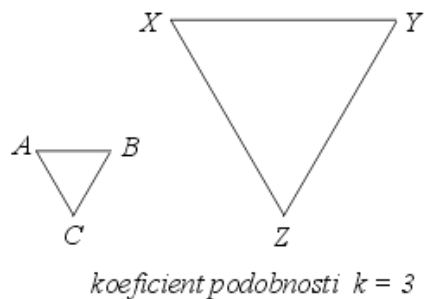
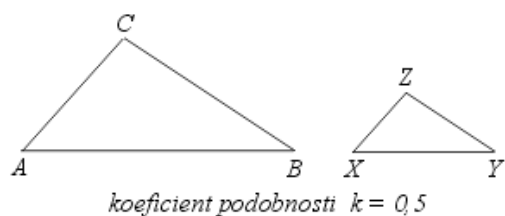
9.4. Podobnost

Matematická definice podobnosti dvou trojúhelníků

Dva trojúhelníky ABC , XYZ jsou podobné, jestliže pro délky jejich stran platí:

$x = k \cdot a$, $y = k \cdot b$, $z = k \cdot c$, kde $k > 0$

- Číslo k se nazývá *poměr podobnosti*.
- Je-li $k > 1$, nazývá se podobnost *zvětšení*.
- Je-li $0 < k < 1$, nazývá se podobnost *zmenšení*.
- Je-li $k = 1$, jsou oba trojúhelníky shodné, to tedy znamená, že shodnost je vlastně také podobností.



Skutečnost, že dva trojúhelníky ABC , XYZ jsou podobné, zapisujeme takto: $DABC \sim DXYZ$

Je při tom důležité dbát na to, aby vrcholy trojúhelníků byly zapsány v tom pořadí, ve kterém si v podobnosti odpovídají.

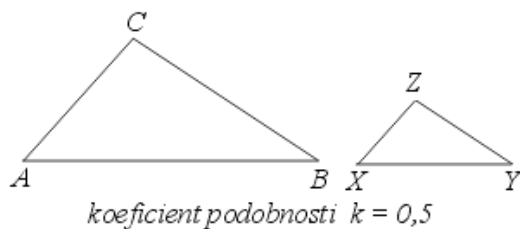
Jak poznáme podobné trojúhelníky?

Podobně jako existují matematické věty, které mluví o shodnosti trojúhelníků (sss, sus, usu), existují i věty, které napovídají, jak poznat trojúhelníky podobné:

Věta sss (plyne z definice podobnosti)

- Každé dva trojúhelníky, v nichž se shodují poměry všech tří dvojic odpovídajících si stran, jsou podobné.

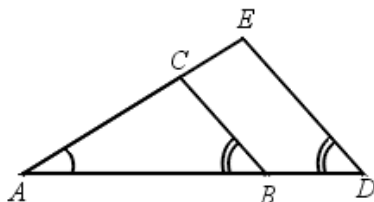
$$\frac{|AB|}{|XY|} = \frac{|BC|}{|YZ|} = \frac{|AC|}{|XZ|} = k$$



Věta uu

- Shodují-li se dva trojúhelníky ve dvou úhlech, pak jsou podobné.

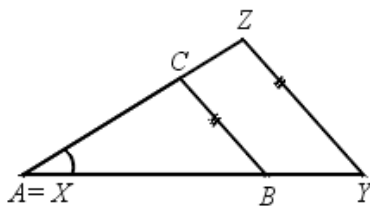
$$\angle CAB = \angle EAD, \angle ABC = \angle ADE$$



Věta sus

- Každé dva trojúhelníky, v nichž se shodují poměry dvou dvojic odpovídajících si stran a v nichž je jimi sevřený úhel shodný, jsou podobné.

$$\frac{|AB|}{|XY|} = \frac{|AC|}{|XZ|} = k, \angle CAB = \angle ZXY$$



Výše uvedené věty se dají s úspěchem využít, je-li zapotřebí rozhodnout o tom, zda jsou dva (nebo i více) trojúhelníky podobné. Mnohem častěji se však podobnosti trojúhelníků jako speciální vlastnosti používá při řešení některých praktických úkolů, například při dělení úsečky na shodné části nebo jejím zmenšování či zvětšování.

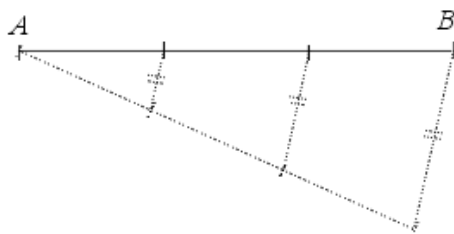
Jak rozdělit úsečku na určitý počet shodných dílů?

Jistě ti v obrázku u výkladu věty sus neušlo, že strany, které leží proti společnému úhlu, jsou navzájem rovnoběžné. Této vlastnosti teď využijeme při dělení úsečky. Postup je ukázán na následujícím obrázku a při řešení následujícího příkladu.

Příklad:

Rozdělte úsečku AB na n stejných částí.

1. Sestrojíme úsečku AB , kterou doplníme na libovolný ostrý úhel BAX .
2. Na rameno úhlu AX nanese n stejně dlouhých úseček, počáteční bod první úsečky splývá s bodem A .
3. Koncový bod n -té úsečky spojíme s bodem B zadané úsečky.
4. Každým dělicím bodem na rameni úhlu AX vedeme rovnoběžné přímky s předchozí spojnicí.
5. Průsečíky těchto rovnoběžek s úsečkou AB dělí úsečku AB na n shodných částí, což lze zdůvodnit na základě podobnosti trojúhelníků, které se shodují ve zvoleném ostrém úhlu a dvou stranách, který jej svírají.

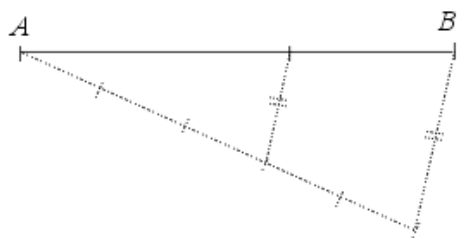


Jak rozdělit úsečku v daném poměru?

Příklad:

Danou úsečku rozdělte v poměru 3:2.

Vyřešit tento příklad není žádný problém, protože určitě správně tušíš, že je zapotřebí zadanou úsečku rozdělit na pět dílů, podobně jako v předchozím příkladě. Více snad napoví následující obrázek.



Jak změnit (zmenšit, zvětšit) úsečku v daném poměru?

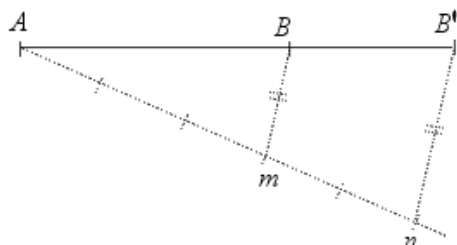
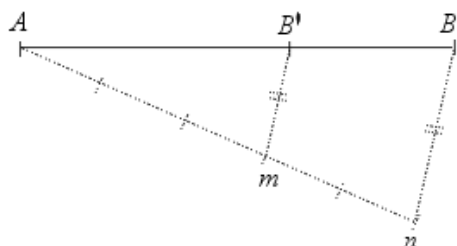
Příklad:

1. Změňte úsečku v poměru $m < n$ (řešení obr. 1).
2. Změňte úsečku v poměru $n < m$ (řešení obr. 2).

Řešení:

- V krajním bodě dané úsečky narýsujeme libovolnou polopřímku, která svírá s úsečkou libovolný ostrý úhel.
- Na ni nanese postupně m a n stejných dílů.
- Koncový bod dané úsečky spojíme s n -tým dílem a m -tým dílem vedeme rovnoběžku.

$$|AB'| = \frac{m}{n} |AB|$$



9.5. Goniometrické funkce

- Poměry stran v pravoúhlém trojúhelníku závisí na velikosti ostrých úhlů. Poměry stran jsou funkcemi velikosti úhlů - goniometrické funkce.
- V pravoúhlém trojúhelníku platí:

$$\frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepóna}} = \sin \alpha \quad \text{sinus ostrého úhlu; značí se: } \sin$$

$$\frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{přepóna}} = \cos \alpha \quad \text{kosinus ostrého úhlu; značí se: } \cos$$

$$\frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přilehlá odvěsna}} = \tan \alpha \quad \text{tangens ostrého úhlu; značí se: } \tan$$

$$\frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{protilehlá odvěsna}} = \cot \alpha \quad \text{kotangens ostrého úhlu; značí se: } \cot$$

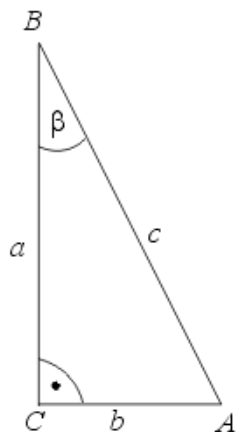
$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \cot \alpha = \frac{b}{a} \quad \tan \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} \quad \cos \beta = \frac{a}{c} \quad \cot \beta = \frac{a}{b} \quad \tan \beta = \frac{b}{a}$$

Užití goniometrických funkcí k výpočtům

Příklad:

V pravoúhlém trojúhelníku ABC je $a = 16 \text{ cm}$ a $\beta = 57^\circ 10'$. Vypočítejte obvod a obsah trojúhelníku ABC .



$$a = 16 \text{ cm}$$

$$\beta = 57^\circ 10'$$

$$o = ? \text{ cm}$$

$$S = ? \text{ cm}^2$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$b = a \cdot \operatorname{tg} \beta$$

$$c = a : \cos \beta$$

$$b = 16 \cdot \operatorname{tg} 57^\circ 10'$$

$$c = 16 : \cos 57^\circ 10'$$

$$b = 16 \cdot 1,55$$

$$c = 16 : 0,5422$$

$$b = 24,8$$

$$c = 29,509$$

$$b = 24,8 \text{ cm}$$

$$c \approx 29,5 \text{ cm}$$

$$o = a + b + c$$

$$S = \frac{a \cdot b}{2}$$

$$o = 16 + 24,8 + 29,5$$

$$S = \frac{16 \cdot 24,8}{2}$$

$$o = 70,3$$

$$S = 198,4$$

$$o = 70,3 \text{ cm}$$

$$S = 198,4 \text{ cm}^2$$

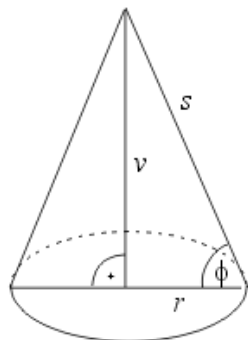
Obvod trojúhelníku je 70,3 cm, obsah je 198,4 cm².

Příklad:

Strana rotačního kužele má délku $s = 15$ cm a svírá s rovinou podstavy úhel $\varphi = 67^\circ 40'$.

Vypočtete:

- poloměr podstavy kužele,
- výšku kužele,
- povrch kužele,
- objem kužele.



Komentář: je vhodné použít kužel? – ještě nebyl probrán

$$s = 15 \text{ cm}$$

$$\varphi = 67^\circ 40'$$

$$r = ? \text{ cm}$$

$$v = ? \text{ cm}$$

$$S = ? \text{ cm}^2$$

$$V = ? \text{ cm}^3$$

$$\text{a) } \cos \varphi = \frac{r}{s}$$

$$r = s \cdot \cos \varphi$$

$$r = 15 \cdot \cos 67^\circ 40'$$

$$r = 15 \cdot 0,38$$

$$r = 5,7$$

$$r = 5,7 \text{ cm}$$

$$\text{c) } S = \pi r (r + s)$$

$$S = 3,14 \cdot 5,7 \cdot (5,7 + 15)$$

$$S = 17,898 \cdot 20,7$$

$$S = 370,488 \text{ 6}$$

$$S = 370,5 \text{ cm}^2$$

$$\text{b) } \sin \varphi = \frac{v}{s}$$

$$v = s \cdot \sin \varphi$$

$$v = 15 \cdot \sin 67^\circ 40'$$

$$v = 15 \cdot 0,925$$

$$v = 13,875$$

$$v \cong 13,9 \text{ cm}$$

$$\text{d) } V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot v$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 5,7^2 \cdot 13,9$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 43,646 \cdot 32,49$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 1418,0585$$

$$V \cong 472,7$$

$$V \cong 472,7 \text{ cm}^3$$

Poloměr podstavy kužele je 5,7 cm, jeho výška je 13,9 cm, povrch je $370,5 \text{ cm}^2$ a objem je $472,7 \text{ cm}^3$.

9.6. Lineární funkce

- Lineární funkce je daná rovnicí:

$$y = ax + b$$

$$a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0, \quad D = \mathbb{R}$$

Graf lineární funkce

- Grafem každé lineární funkce je přímka.
- Přímka je určena dvěma různými body - z rovnice funkce určíme souřadnice dvou bodů.

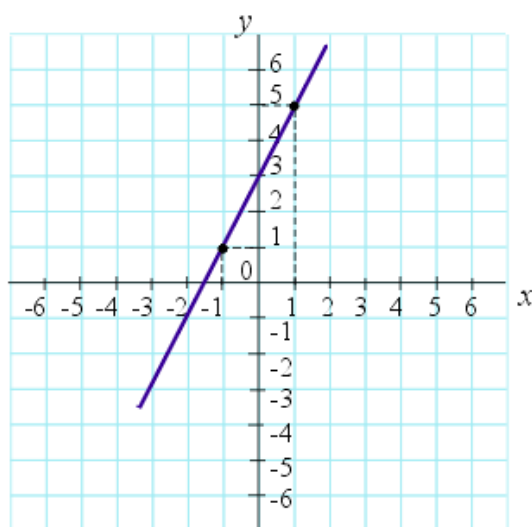
Příklad:

Sestrojte graf funkce: $y = 2x + 3$

Řešení: Určíme souřadnice dvou bodů:

$$x_1 = 1 \quad \dots \quad y_1 = 5 \quad \dots \quad [1; 5]$$

$$x_2 = -1 \quad \dots \quad y_2 = 1 \quad \dots \quad [-1; 1]$$



Vlastnosti lineární funkce

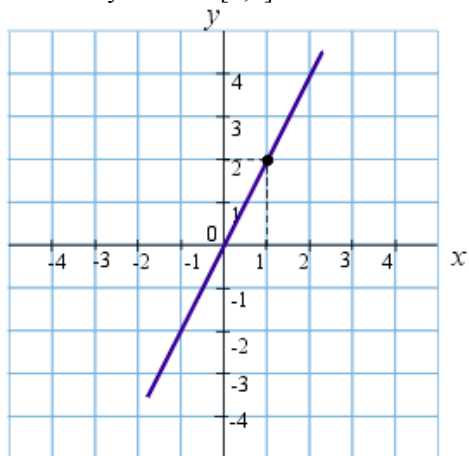
- Je-li $b = 0$, dostaneme $y = ax$, jedná se o přímou úměrnost, grafem je přímka procházející počátkem.

Příklad:Sestrojte graf funkce: $y = 2x$

Řešení:

$x = 0 \quad \dots \quad y = 0 \quad \dots \quad [0;0]$

$x = 1 \quad \dots \quad y = 2 \quad \dots \quad [1;2]$

b) Přímka protíná osu y v bodě $[0;b]$.**Příklad:**

Sestrojte grafy těchto funkcí:

1)

$y = 2x + 3$	...	$x = 0$	...	$y = 3$ $[0;3]$	...	průsečík s y
		$x = 1$	...	$y = 5$ $[1;5]$		

přímka p

2)

$y = -x - 1$	...	$x = 0$	...	$y = -1$ $[0;-1]$	...	průsečík s y
		$x = 1$	...	$y = -2$ $[1;-2]$		

přímka r

3)

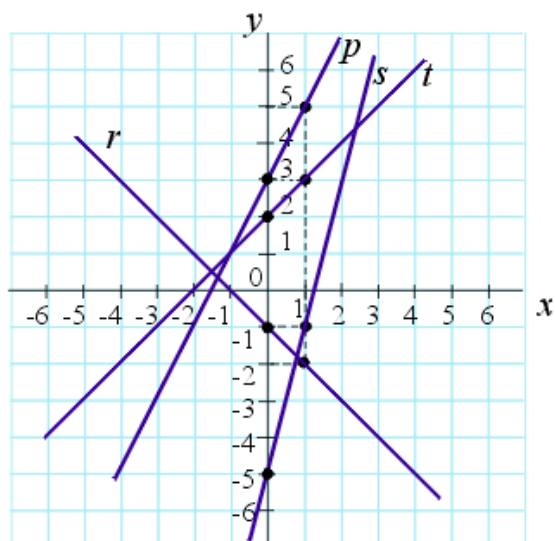
$y = 4x - 5$	...	$x = 0$	...	$y = -5$ $[0;-5]$	...	průsečík s y
		$x = 1$	...	$y = -1$ $[1;-1]$		

přímka s

4)

$y = x + 2$	...	$x = 0$	...	$y = 2$ $[0;2]$	...	průsečík s y
		$x = 1$	...	$y = 3$ $[1;3]$		

přímka t



c) Lineární funkce je rostoucí, je-li $a > 0$, tzn. pro každá dvě čísla x_1, x_2 platí: jestliže $x_1 < x_2$, pak $y_1 < y_2$.

Příklad:

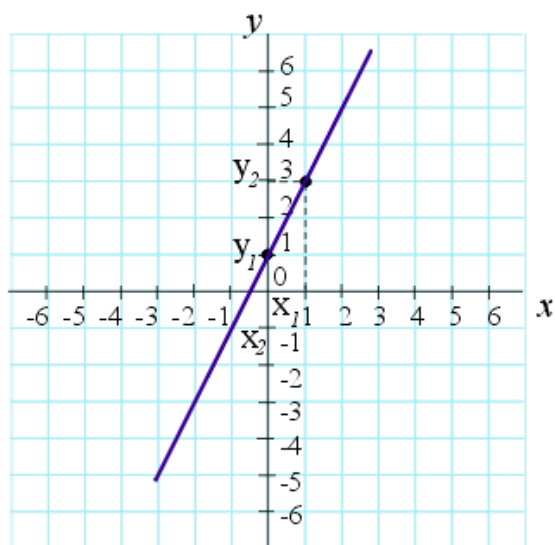
Sestrojte graf funkce: $y = 2x + 1$

$a = 2 \dots a > 0 \dots$ funkce je rostoucí

$x_1 = 0 \dots y_1 = 1$

$x_2 = 1 \dots y_2 = 3$

$x_1 < x_2 \dots y_1 < y_2$



d) Lineární funkce je klesající, je-li $a < 0$, tzn. pro každá dvě čísla x_1, x_2 platí: $x_1 > x_2$, pak $y_1 < y_2$.

Příklad:

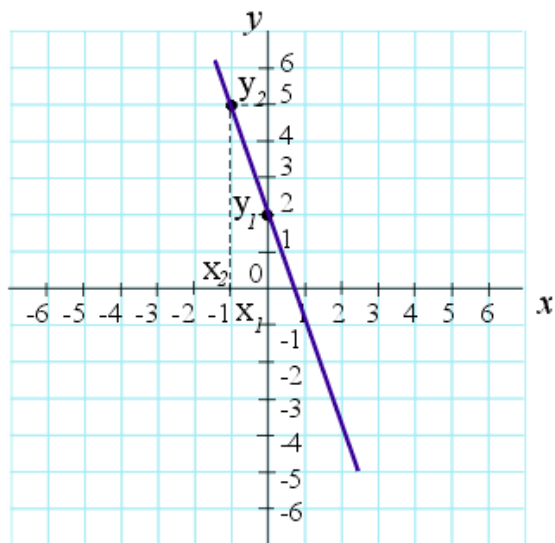
Sestrojte graf funkce: $y = -3x + 2$

$a = -3 \dots a < 0 \dots$ funkce klesající

$x_1 = 0 \dots y_1 = 2$

$x_2 = -1 \dots y_2 = 5$

$x_1 > x_2 \dots y_1 < y_2$



e) Lineární funkce je konstantní, je-li $a = 0$, jejím grafem je vždy přímka rovnoběžná s osou x , která prochází bodem $[0; b]$.

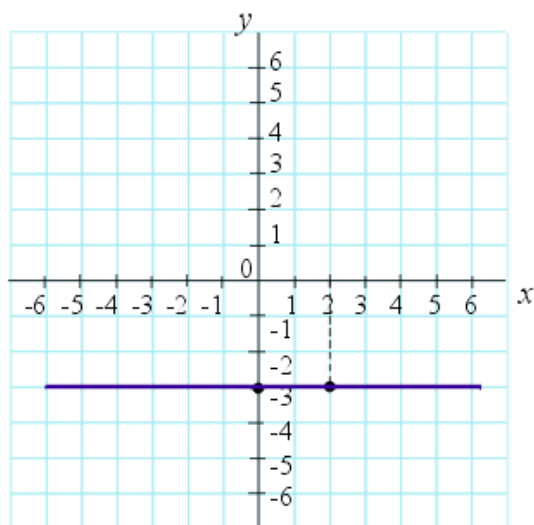
Příklad:

Sestrojte graf funkce: $y = 0 \cdot x - 3$

$a = 0 \dots$ přímka rovnoběžná s osou x

$x = 0 \dots y = -3 \dots [0; -3]$

$x = 2 \dots y = -3 \dots [2; -3]$



f) Jsou-li dvě lineární funkce určeny rovnicemi:

$y = a_1x + b_1$

$y = a_2x + b_2$

a jestliže $a_1 = a_2$, pak grafy těchto funkcí jsou navzájem rovnoběžné přímky.

Příklad:

Sestrojte grafy funkcí:

$$y = -x + 2$$

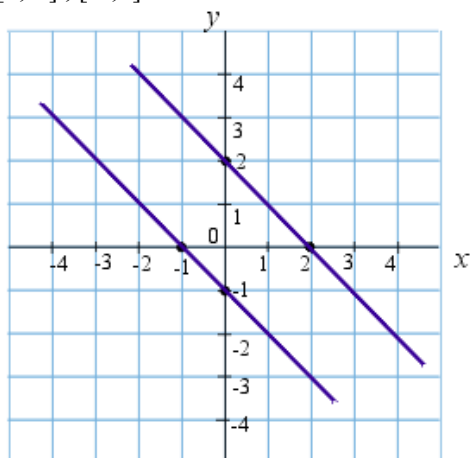
$$y = -x - 1$$

$$y = -x + 2$$

$$[0;2], [2;0]$$

$$y = -x - 1$$

$$[0;-1], [-1;0]$$

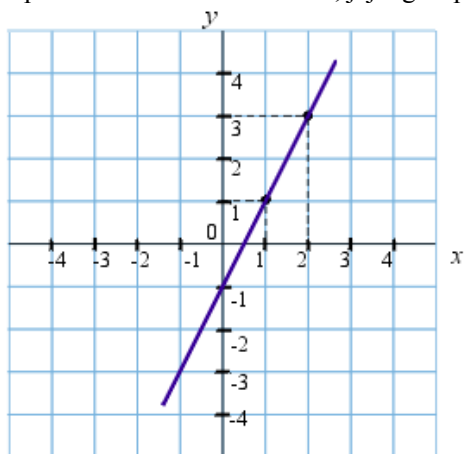


Určení lineární funkce z grafu

- Jsou dány dva body grafu funkce.
- Do rovnice lineární funkce $y = ax + b$ dosadíme souřadnice bodů a dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých a , b .
- Vypočítáme čísla a , b .
- Zapišeme rovnici funkce.

Příklad:

Zapište rovnici lineární funkce, jejíž graf prochází body $A[1;1]$ a $B[2;3]$.



$$y = ax + b$$

$$A[1;1] \quad \dots \quad 1 = a + b$$

$$B[2;3] \quad \dots \quad 3 = 2a + b$$

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & a + b \\ 3 & = & 2a + b \end{array} \quad /.(-1)$$

$$\begin{array}{rcl} -1 & = & -a - b \\ 3 & = & 2a + b \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} & & 2 = a \\ 1 = a + b & \dots & 1 = 2 + b \\ & & -1 = b \end{array}$$

Rovnice lineární funkce procházející body A a B: $y = 2x - 1$.

9.7 Kvadratická funkce

- Kvadratická funkce je dána rovnicí:

$$y = ax^2$$

$$a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0, \quad D = \mathbb{R}$$

- Grafem kvadratické funkce je křivka – parabola.

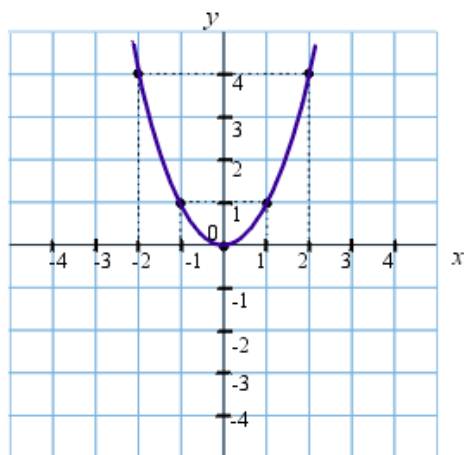
Příklad:

Sestrojte graf funkce: $y = x^2$.

Sestavíme tabulku:

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

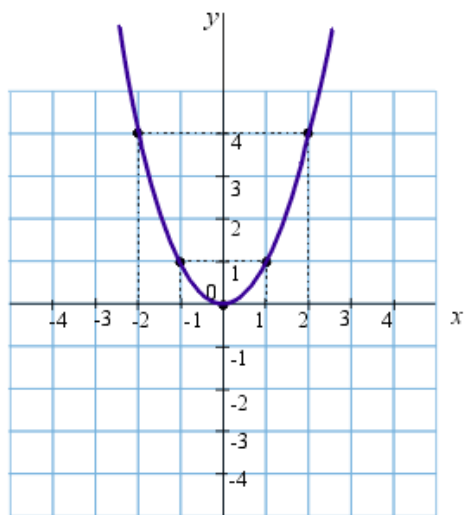
Sestrojíme graf:



Hodnota funkce je stejná pro čísla -2 a 2: platí $x^2 = (-x)^2$, graf je souměrný podle osy y.

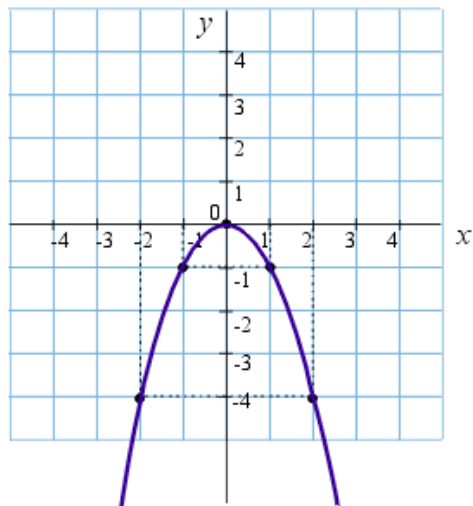
Vlastnosti kvadratické funkce

Pro rovnici $y = ax^2$, kde $a > 0$, platí:



- a) $D = \mathbb{R}$, $H = \{0, \infty\}$
- b) pro $x = 0$ nabývá funkce své nejmenší hodnoty - tzv. minima
- c) funkce je pro všechna záporná reálná čísla klesající a pro všechna kladná reálná čísla rostoucí
- d) ve svém minimu má graf funkce vrchol paraboly

Pro rovnici $y = ax^2$, kde $a < 0$, platí:



- a) $D = \mathbb{R}$, $H = (-\infty, 0]$
 b) pro $x = 0$ nabývá funkce své největší hodnoty - tzv. maxima
 c) funkce je pro všechna záporná reálná čísla rostoucí a pro všechna kladná reálná čísla klesající
 d) ve svém maximu má graf funkce vrchol paraboly

Funkce s absolutní hodnotou

Komentář: chybi!

Určete, kdy mají dané výrazy smysl:

a) $\frac{3}{x}$

b) $\frac{4-x}{5}$

c) $\frac{3x-2}{x+6}$

d) $\frac{7x-6}{7x+5}$

e) $\frac{11-3x}{x^2+9x}$

f) $\frac{13}{4x^2-20x+25}$

g) $\frac{8x-7}{x^2-9}$

h) $\frac{26x-17}{9x^2-25}$

i) $\frac{7x-35}{4x+8x^2}$

j) $\frac{x-1}{8x^3-2x}$

k) $\frac{2x-7}{x^2+4}$

l) $\frac{9x^2-4}{16x^2+13}$

Řešení :

a) $x \neq 0$

b) $x \in R$

c) $x \neq -6$

d) $x \neq -\frac{5}{7}$

e) $x \neq 0 \wedge x \neq -9$

f) $x \neq 2,5$

g) $x \neq \pm 3$

h) $x \neq \pm \frac{5}{3}$

i) $x \neq 0 \wedge x \neq -0,5$

j) $x \neq 0 \wedge x \neq \pm 0,5$

k) $x \in R$

l) $x \in R$

Určete, kdy mají dané výrazy smysl:

$$a) \frac{8}{7x^2y}$$

$$b) \frac{x-y}{x+y}$$

$$c) \frac{3x-7y}{5x+9y}$$

$$d) \frac{36x-25y}{9x^2-4y^2}$$

$$e) \frac{2x-y}{x^2+10xy+25y^2}$$

$$f) \frac{(x-y)(x+y)}{4x^2-24xy+36y^2}$$

Určete, kdy se výraz rovná nule:

$$g) \frac{x}{x^2-1}$$

$$h) \frac{x-3}{x-7}$$

$$i) \frac{5x+6}{2x+1}$$

$$j) \frac{x^2-2x}{16x-9}$$

$$k) \frac{x^2+4x}{x^2-4x}$$

$$l) \frac{x^2-16}{x+4}$$

Řešení :

$$a) x \neq 0 \wedge y \neq 0$$

$$b) x \neq -y$$

$$c) x \neq -\frac{9}{5}y$$

$$d) x \neq \pm \frac{2}{3}y$$

$$e) x \neq -5y$$

$$f) x \neq 3y$$

$$g) \text{pro} : x = 0; x \neq 1$$

$$h) \text{pro} : x = 3; x \neq 7$$

$$i) \text{pro} : x = -\frac{6}{5}; x \neq -0,5$$

$$j) \text{pro} : x = 0 \vee x = 2; x \neq \frac{9}{16}$$

$$k) \text{pro} : x = 0 \vee x = -4; x \neq 0 \wedge x \neq 4$$

$$l) \text{pro} : x = 4; x \neq -4$$

Rozšiřte dané lomené výrazy výrazem uvedeným v závorce :

$$a) \frac{-x-y}{x-y} \dots \langle -1 \rangle$$

$$b) \frac{2}{7x} \dots \langle 3 \rangle$$

$$c) \frac{3x}{4y} \dots \langle -5x \rangle$$

$$d) \frac{-7x}{3y} \dots \langle 4xy \rangle$$

$$e) \frac{x+5}{4x} \dots \langle x-2 \rangle$$

$$f) \frac{-2x}{x-y} \dots \langle -x-y \rangle$$

Rozšiřte lomené výrazy tak, aby se jmenovatel rovnal výrazu uvedenému v závorce :

$$g) \frac{2}{13a} \dots \langle 39a \rangle$$

$$h) \frac{4}{7b} \dots \langle 14ab \rangle$$

$$i) \frac{2a-9}{3a} \dots \langle 6a^2b \rangle$$

$$j) \frac{4a}{a+1} \dots \langle a^2+a \rangle$$

$$k) \frac{c-2}{c+2} \dots \langle c^2-4 \rangle$$

$$l) \frac{c+5}{c-5} \dots \langle c^2-10c+25 \rangle$$

Řešení :

$$a) \frac{x+y}{y-x}; x \neq y$$

$$b) \frac{6}{21x}; x \neq 0$$

$$c) \frac{-15x^2}{-20xy}; x \neq 0 \wedge y \neq 0$$

$$d) \frac{-28x^2y}{12xy^2}; x \neq 0 \wedge y \neq 0$$

$$e) \frac{x^2+3x-10}{4x^2-8x}; x \neq 0 \wedge x \neq 2$$

$$f) \frac{2x^2+2xy}{y^2-x^2}; x \neq \pm y$$

$$g) \frac{6}{39a}; a \neq 0$$

$$h) \frac{8a}{14ab}; a \neq 0 \wedge b \neq 2$$

$$i) \frac{4a^2b-18ab}{6a^2b}; a \neq 0 \wedge b \neq 0$$

$$j) \frac{4a^2}{a^2+a}; a \neq 0 \wedge a \neq -1$$

$$k) \frac{(c-2)^2}{c^2-4}; c \neq \pm 2$$

$$l) \frac{c^2-25}{c^2-10c+25}; c \neq 5$$

Rozšiřte dané lomené výrazy výrazem uvedeným v závorce :

$$a) \frac{-x-y}{x-y} \dots \langle -1 \rangle$$

$$b) \frac{2}{7x} \dots \langle 3 \rangle$$

$$c) \frac{3x}{4y} \dots \langle -5x \rangle$$

$$d) \frac{-7x}{3y} \dots \langle 4xy \rangle$$

$$e) \frac{x+5}{4x} \dots \langle x-2 \rangle$$

$$f) \frac{-2x}{x-y} \dots \langle -x-y \rangle$$

Rozšiřte lomené výrazy tak, aby se jmenovatel rovnal výrazu uvedenému v závorce :

$$g) \frac{2}{13a} \dots \langle 39a \rangle$$

$$h) \frac{4}{7b} \dots \langle 14ab \rangle$$

$$i) \frac{2a-9}{3a} \dots \langle 6a^2b \rangle$$

$$j) \frac{4a}{a+1} \dots \langle a^2+a \rangle$$

$$k) \frac{c-2}{c+2} \dots \langle c^2-4 \rangle$$

$$l) \frac{c+5}{c-5} \dots \langle c^2-10c+25 \rangle$$

Řešení :

$$a) \frac{x+y}{y-x}; x \neq y$$

$$b) \frac{6}{21x}; x \neq 0$$

$$c) \frac{-15x^2}{-20xy}; x \neq 0 \wedge y \neq 0$$

$$d) \frac{-28x^2y}{12xy^2}; x \neq 0 \wedge y \neq 0$$

$$e) \frac{x^2+3x-10}{4x^2-8x}; x \neq 0 \wedge x \neq 2$$

$$f) \frac{2x^2+2xy}{y^2-x^2}; x \neq \pm y$$

$$g) \frac{6}{39a}; a \neq 0$$

$$h) \frac{8a}{14ab}; a \neq 0 \wedge b \neq 2$$

$$i) \frac{4a^2b-18ab}{6a^2b}; a \neq 0 \wedge b \neq 0$$

$$j) \frac{4a^2}{a^2+a}; a \neq 0 \wedge a \neq -1$$

$$k) \frac{(c-2)^2}{c^2-4}; c \neq \pm 2$$

$$l) \frac{c^2-25}{c^2-10c+25}; c \neq 5$$

Zjednodušte a uveďte, kdy mají dané lomené výrazy smysl:

$$a) \frac{2a^2 + 3ab}{6ab + 9b^2}$$

$$b) \frac{4a^2 - 28ab}{2a^2 - 14ab}$$

$$c) \frac{6a^2 + 3ab}{a^2 + 2ab}$$

$$d) \frac{9a^2 - 4b^2}{9a^2 - 12ab + 4b^2}$$

$$e) \frac{81a^2 - 1}{27a + 3}$$

$$f) \frac{6a^3 + 48a^2 + 96a}{3a^2 + 12a}$$

$$g) \frac{(x+3y)^2 - y^2}{xy + 2y^2}$$

$$h) \frac{x^2 + xy - y(3x - y)}{2(x - y)^2}$$

Řešení :

$$a) \frac{a}{3b}; b \neq 0 \wedge a \neq -\frac{3b}{2}$$

$$b) 2; a \neq 0 \wedge a \neq 7b$$

$$c) \frac{3(2a+b)}{a+2b}; a \neq 0 \wedge a \neq -2b$$

$$d) \frac{3a+2b}{3a-2b}; a \neq \frac{2b}{3}$$

$$e) \frac{9a-1}{3}; a \neq -\frac{1}{9}$$

$$f) 2(a+4); a \neq 0 \wedge a \neq -4$$

$$g) \frac{x+4y}{y}; y \neq 0 \wedge x \neq -2y$$

$$h) \frac{1}{2}; x \neq y$$

Zjednodušte :

a) $\frac{y+1}{y} - \frac{y-3}{y-1}$

b) $\frac{2a}{a-3} - \frac{a}{2a-6}$

c) $\frac{2}{b} - \frac{b-3}{b^2+2b}$

d) $\frac{x}{x+1} - \frac{2x-3}{2x}$

e) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+1}{2-2x}$

f) $\frac{x+2}{x-2} - \frac{2x+4}{x^2-2x}$

g) $\frac{x+2}{6x} - \frac{x^2+1}{3x^2+3x}$

h) $\frac{s+2}{s+1} - \frac{s-1}{s-2}$

i) $2 - \frac{x-5}{x+6}$

j) $\frac{x-4}{x-5} - 2x$

Řešení :

a) $\frac{3y-1}{y(y-1)}; y \neq 0 \wedge y \neq 1$

b) $\frac{3a}{2(a-3)}; a \neq 3$

c) $\frac{b+7}{b(b+2)}; b \neq 0 \wedge b \neq -2$

d) $\frac{x+3}{2x(x+1)}; x \neq 0 \wedge x \neq -1$

e) $\frac{3(x+1)}{2(x-1)}; x \neq 1$

f) $\frac{x+2}{x}; x \neq 0 \wedge x \neq 2$

g) $\frac{3-x}{6(x+1)}; x \neq 0 \wedge x \neq -1$

h) $\frac{-3}{(s+1)(s-1)}; s \neq -1$

i) $\frac{x+17}{x+6}; x \neq -6$

j) $\frac{-2x^2+11x-4}{x-5}; x \neq 5$

Zjednodušte :

$$a) \frac{1}{2u} - \frac{5}{6u} + \frac{u-1}{u^2+u}$$

$$b) \frac{4}{v} - \frac{v-1}{v^2} - \frac{3}{v+2}$$

$$c) x-3 + \frac{1}{x-3}$$

$$d) 2x-1 - \frac{2x^2+3}{x+6}$$

$$e) \frac{x+5}{x+4} + x-3$$

$$f) \frac{3+x^2}{x+3} - (x-2)$$

$$g) \frac{a+1}{a-1} - \frac{a-1}{a+1}$$

$$h) \frac{b+2}{b-2} - \frac{b+1}{2-b}$$

$$i) \frac{3c-1}{c-2} - \frac{1-3c}{2+c}$$

$$j) \frac{2d+3}{d^2-1} - \frac{d+1}{1-d}$$

Řešení :

$$a) \frac{2(u-2)}{3u(u+1)}; u \neq 0 \wedge u \neq -1$$

$$b) \frac{7v+2}{v^2(v+2)}; v \neq 0 \wedge v \neq -2$$

$$c) \frac{x^2-6x+10}{x-3}; x \neq 3$$

$$d) \frac{11x-9}{x+6}; x \neq -6$$

$$e) \frac{x^2+2x-7}{x+4}; x \neq -4$$

$$f) \frac{9-x}{x+3}; x \neq -3$$

$$g) \frac{4a}{a^2-1}; a \neq \pm 1$$

$$h) \frac{2b+3}{b-2}; b \neq 2$$

$$i) \frac{2c(3c-1)}{c^2-4}; c \neq \pm 2$$

$$j) \frac{(d+2)^2}{d^2-1}; d \neq \pm 1$$

Zjednodušte :

a) $\frac{6x^4}{3xy^2} \cdot \frac{y^3}{2x^2y}$

b) $\frac{9x^5y^4}{5xy^5} \cdot \frac{20y^4}{12x^2y^3}$

c) $\frac{3x^2}{5z} \cdot \frac{4y^3}{6x} \cdot \frac{10z^2}{xy}$

d) $\frac{105x^2}{7xy} \cdot \frac{y^2}{6xz} \cdot \frac{z^2}{5yz}$

e) $\frac{x+3}{x} \cdot \frac{2x}{x+3}$

f) $\frac{x^2}{x+8} \cdot \frac{8+x}{x}$

g) $\frac{x-5}{4x} \cdot \frac{2x^2}{x-5}$

h) $\frac{9x^2y}{x-7} \cdot \frac{7-x}{6xy}$

i) $\frac{3x^2y}{6x-y} \cdot \frac{3y-18x}{x+y}$

j) $\frac{8-2x}{x^2-x} \cdot \frac{x-1}{x-4}$

Řešení :

a) $x; x \neq 0 \wedge y \neq 0$

b) $3x^2; x \neq 0 \wedge y \neq 0$

c) $4y^2z; x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0$

d) $\frac{1}{2}; x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0$

e) $2; x \neq 0 \wedge x \neq -3$

f) $x; x \neq 0 \wedge z \neq -8$

g) $\frac{x}{2}; x \neq 0 \wedge z \neq 5$

h) $-\frac{3x}{2}; x \neq 7 \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0$

i) $\frac{-9x^2y}{x+y}; x \neq -y \wedge y \neq 0$

j) $-\frac{2}{x}; x \neq 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq 4$

Zjednodušte :

$$a) \left(3a - \frac{3a}{a+1} \right) \left(1 - \frac{1}{a^2} \right)$$

$$b) \left(1 - \frac{2}{a+1} \right) \left(1 - \frac{2}{a-1} \right)$$

$$c) \left(\frac{a}{a-1} - \frac{3a-1}{a^2-1} \right) \left(1 + \frac{1}{a} \right)$$

$$d) \left(\frac{a}{a+1} - \frac{3a+1}{1-a^2} \right) \left(\frac{1}{a} - 1 \right)$$

Zjednodušte a správnost výsledku pro $x = 1$

ověřte dosazením :

$$e) \left(\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{2+x} \right) \cdot \frac{x+2}{2x}$$

Zjednodušte a správnost výsledku pro $x = 0$

ověřte dosazením :

$$f) \left(\frac{x+3}{x+6} - \frac{x-2}{x-6} \right) \cdot \frac{x+6}{7x+6}$$

$$g) \left(\frac{x+2}{x-2} + \frac{2}{x^2-4} - \frac{x}{x+2} \right) \cdot \left(2 - \frac{x+4}{x+1} \right)$$

Zjednodušte a správnost výsledku pro $x = -2$

ověřte dosazením :

$$h) \left(\frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{1-x} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{x-2} \right)$$

Komentář: nepodařilo se nalézt příklady na – složené výrazy, lineární rovnice s neznámou ve jmenovateli, podobnost, funkce

Řešení :

$$a) x; x \neq 0 \wedge y \neq 0$$

$$b) 3x^2; x \neq 0 \wedge y \neq 0$$

$$c) 4y^2z; x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0$$

$$d) \frac{1}{2}; x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0$$

$$e) 2; x \neq 0 \wedge x \neq -3$$

$$f) x; x \neq 0 \wedge z \neq -8$$

$$g) \frac{x}{2}; x \neq 0 \wedge z \neq 5$$

$$h) -\frac{3x}{2}; x \neq 7 \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0$$

$$i) \frac{-9x^2y}{x+y}; x \neq -y \wedge y \neq 0$$

$$j) -\frac{2}{x}; x \neq 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq 4$$